Correction du Contrôle 8
Probabilités et fonction inverse

Solution de l'exercice 1. On possède une urne contenant 18 boules jaunes numérotées de 1 à 18 et 12 boules violettes numérotées de 1 à 12. On pioche au hasard l'une des boules.

0. Lorsque chaque boule a la même probabilité d'être tirée quelle que soit sa couleur ou son numéro, on dit que le tirage est *équiprobable*.

On considère les évènements suivants :

- A : « la boule tirée est une boule jaune. ».
- B : « la boule tirée possède un numéro divisible par 3 ».

1. Notons $J1$, $J2$, ..., $J18$ les boules jaunes numéro 1, 2, ..., 18 respectivement et de même $V1$, $V2$, ..., $V12$ les boules violettes numéro 1, 2, ..., 12 respectivement. On a alors :
$$B = \{J3, J6, J9, J12, J15, J18, V3, V6, V9, V12\}.$$
Les boules de $A \cap B$ sont les boules qui ont à la fois la couleur jaune et à la fois un numéro divisible par 3. Donc :
$$A \cap B = \{J3, J6, J9, J12, J15, J18\}.$$

2. Il y a 18 boules jaunes parmi les $18 + 12 = 30$ boules de l'urne. Comme nous sommes dans un cas équiprobable, on a
$$p(A) = \frac{18}{30} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6.$$
De même B contient 10 issues. Donc
$$p(B) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$
Enfin, $A \cap B$ contient 6 issues, donc
$$p(A \cap B) = \frac{6}{30} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

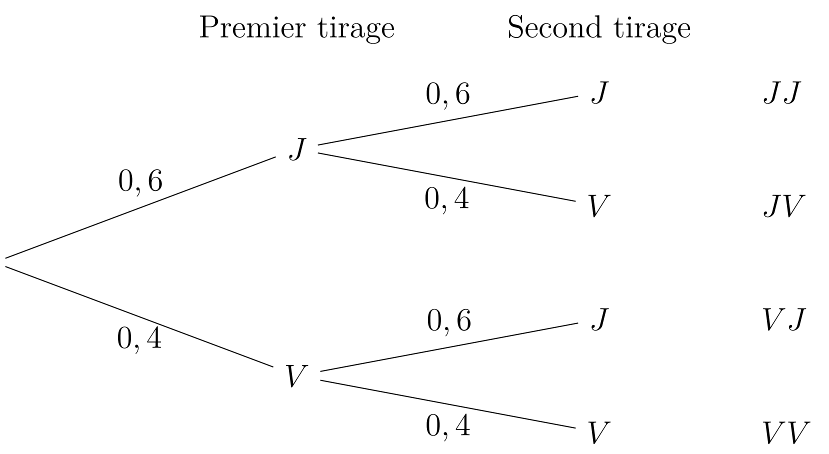
3. D'après la formule du cours :
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{18}{30} + \frac{10}{30} - \frac{6}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}.$$

4. L'évènement $\bar{B}$ est la négation de l'évènement B :
$$\bar{B} : \text{« Le numéro de la boule tirée n'est pas divisible par 3. ».}$$

5. On pouvait énumérer les issues de $\bar{B}$ et en déduire sa probabilité ou directement par la formule du cours et la question 2 :
$$p\left(\bar{B}\right) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

On pioche à deux reprises dans le jeu. A chaque tirage, on note si l'on a obtenu un boule jaune ou non puis l'on remet la boule tirée dans le jeu.

6. La probabilité d'obtenir un succès est la probabilité d'obtenir une boule jaune, c'est-à-dire de réaliser l'évènement A et d'après la question 2 : $p(A) = 0,6$. La probabilité d'obtenir un échec est donc $p\left(\bar{A}\right) = 1 - p(A) = 1 - 0,6 = 0,4$. Ceci correspond donc à la probabilité d'obtenir une boule violette. L'arbre des probabilités associé est donc



7. Soit C l'évènement obtenir une boule jaune et une boule violette. D'après l'arbre, on a

$$p(C) = p(JV) + p(VJ) = 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6 = 0,24 + 0,24 = 0,48.$$

Solution de l'exercice 2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{5x+7}{x+8}.$$

1. La fonction est définie partout sauf lorsque son dénominateur s'annule. Notons $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition. On a

$$\begin{aligned} x \notin \mathscr{D}_f &\Leftrightarrow x + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -8. \end{aligned}$$

   Ainsi la fonction f est définie sur tous les réels sauf -8 :

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-8\} =]-\infty; -8[\cup]-8; +\infty[.$$

2. On met 2 sur même dénominateur que f :

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= \frac{5x+7}{x+8} - 2 \\ &= \frac{5x+7}{x+8} - 2 \times \frac{x+8}{x+8} \\ &= \frac{5x+7}{x+8} - \frac{2 \times (x+8)}{x+8} \\ &= \frac{5x+7}{x+8} - \frac{2x+16}{x+8} \\ &= \frac{5x+7-2x-16}{x+8} \\ &= \frac{3x-9}{x+8}. \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 3x - 9 \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x \geqslant 9 \\ &\Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{9}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad x \geqslant 3. \end{aligned}$$

   L'ensemble solution est donc $\mathscr{S} = [3; +\infty[$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x + 8 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -8.$$

   L'ensemble solution est donc $\mathscr{S} = [-8; +\infty[$.

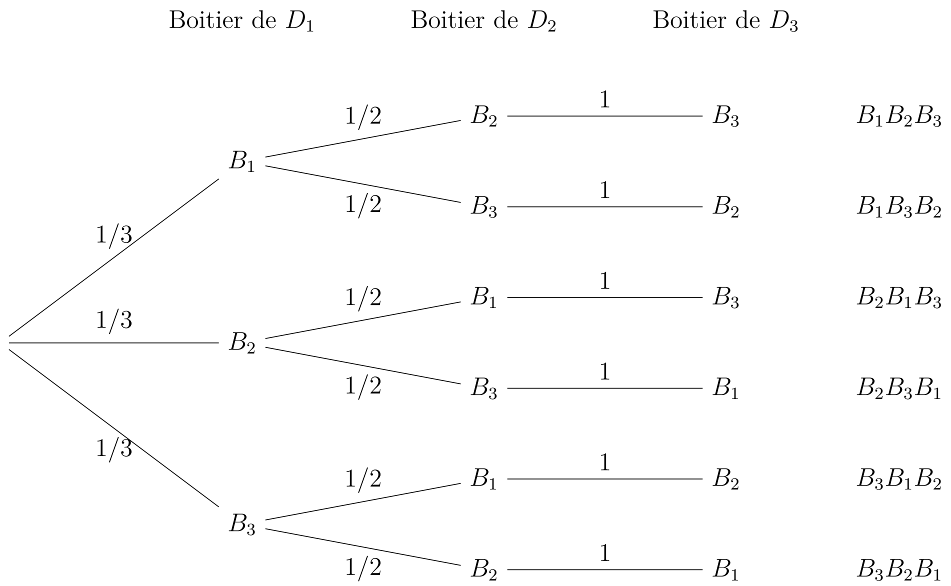
5. Grâce au tableau de signe

x	$-\infty$		-8		3		$+\infty$
$3x - 9$		$-$		$-$	0	$+$	
$x - 8$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3x-9}{x+8}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

   on en déduit que $f(x) - 2 = \frac{3x-9}{x+8}$ est négatif ou nul sur l'ensemble $]-8; 3]$.

Solution de l'exercice 3. Monsieur Dupont possède trois DVD notés D_1, D_2 et D_3 qu'il doit ranger dans leurs boitiers notés B_1, B_2 et B_3. Seulement Monsieur Dupont n'aime pas ranger et se contente de mettre chaque DVD dans un boitier au hasard. Il commence par ranger le premier DVD D_1 puis le DVD D_2 et enfin le DVD D_3.

1. Au départ les trois boitiers sont vides. On peut donc ranger D_1 dans B_1 ou dans B_2 ou dans B_3. On suppose l'expérience équiprobable et donc chacune de issue a la probabilité 1/3 de se produire.
2. Une fois que D_1 est rangé, il reste deux boitiers possibles pour D_2.Une fois D_1 et D_2 rangés, il ne reste plus qu'un seul boitier de disponible.
3. L'arbre qui en résulte est donc le suivant :



On considère les évènements suivants :

- A : « Tous les DVD sont bien rangés ».
- B : « Au moins un DVD est bien rangé ».
- C : « Exactement un DVD est bien rangé ».

On convient que l'on écrit $B_1B_3B_2$ par exemple pour l'issue pour laquelle D_1 se trouve dans B_1, D_2 se trouve dans B_3 et D_3 se trouve dans B_2.

4. Il existe une seule façon de bien ranger les DVD qui est $A = \{B_1B_2B_3\}$.
5. En utilisant l'arbre, on en déduit que
$$p(A) = p\left(B_1B_2B_3\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}.$$
6. Si TOUS les DVD sont bien rangés, alors au moins un DVD est bien rangé (puisque même les trois le sont) donc l'unique issue de A est une issue de B. Donc A est un sous-ensemble de B.
7. Les éléments qui sont et dans A et dans B, sachant que tous les éléments de A sont dans B, sont tous les éléments de A : $A \cap B = A = \{B_1B_2B_3\}$.
8. La négation de B est $\bar{B}$: « Tous les DVD sont mal rangés ».
9. Pour que tous les DVD soient mal rangés, il faut commencer par mal ranger le premier DVD ce qui nous laisse les issues $B_2B_1B_3$, $B_2B_3B_1$, $B_3B_1B_2$ et $B_3B_2B_1$. Il faut également que le deuxième DVD soit mal rangé ce qui élimine $B_3B_2B_1$ puis que le troisième DVD soit mal rangé ce qui élimine également $B_2B_1B_3$. Il nous reste donc $B_2B_3B_1$ et $B_3B_1B_2$: $\bar{B} = \{B_2B_3B_1, B_3B_1B_2\}$. Ainsi la probabilité d'avoir $\bar{B}$ est de
$$p\left(\bar{B}\right) = p\left(B_2B_3B_1\right) + p\left(B_3B_1B_2\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$
10. D'après la formule du cours, on a donc :
$$p\left(B\right) = 1 - p\left(\bar{B}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$